Stage de recherche de M1

Avril - juin 2023

Gael Druez

Symmetries in computationnal algebra

Sous la direction de Cordian Riener

UiT The Arctic University of Norway

Avec le soutien financier de :

ENS rennes | Université de Rennes

Centre Henri Lebesgue — Centre de mathématiques

gael.druez@ens-rennes.fr

Table des matières

 gael.druez@ens-rennes.fr

1 Présentation et objectifs

Ce stage vise à généraliser un résultat connu sur des polynômes symétriques.

En effet, [N P09] et [Lau16] étudient une factorisation du discriminant pour des polynômes symétriques. On cherche à généraliser ce résultat pour des polynômes invariants sous l'action d'un groupe plus général, à savoir un groupe de réflexion.

Dans une première partie, on étudiera le résultat de factorisation du discriminant pour des polynômes symétriques. On introduira les outils importants et on expliquera rapidement les idées importantes de la preuve.

Ensuite, on étudiera les groupes de réflexion et comment certaines de leurs propriétés laissent penser qu'ils généraliseront le résultat. On suivra les exemples des groupes $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{D}_n$, le groupe symétrique et le groupe diédral, tous deux des groupes de réflexions qui nous permettront de mettre en avant les propriétés importantes.

Enfin, on regardera en détail la généralisation en question : on détaillera comment les notions particulières à $\mathcal{S}_n$ peuvent se généraliser à un groupe de réflexion quelconque, en utilisant les propriétés particulières de ces groupes.

 gael.druez@ens-rennes.fr

2 Discriminant et polynômes symétriques

2.1 Discriminant, motivation et définitions

2.2 Les différences divisées

Proposition - Existence des différences divisées :

> Pour tout ensemble $\{i_1, \dots, i_k\} \subset [\![1, n]\!]$, il existe un unique polynôme homogène $F^{\{i_1,\dots,i_k\}} \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ de degré $d - k + 1$ vérifiant :
>
> $$V(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \cdot F^{\{i_1,\dots,i_k\}}(x_1, \dots, x_n) = \det \begin{vmatrix} 1 & x_{i_1} & \dots & x_{i_1}^{k-2} & F^{\{i_1\}}(x_1, \dots, x_n) \\ 1 & x_{i_2} & \dots & x_{i_2}^{k-2} & F^{\{i_2\}}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{i_k} & \dots & x_{i_k}^{k-2} & F^{\{i_k\}}(x_1, \dots, x_n) \end{vmatrix}$$

Définition - Différences divisées :

> Avec les notations précédentes, pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, on appelle **différences divisées d'ordre k-1** les polynômes $F^{\{i_1,\dots,i_k\}}$, où $\{i_1, \dots, i_k\} \subset [\![1, n]\!]$.

On remarque que pour $k - 1 > d$, on a $F^{\{i_1,\dots,i_k\}} = 0$

Le cas simple où $k = 2$ montre rapidement que les premières différences divisées vérifient $(x_i - x_j) \cdot F^{\{i,j\}} = F^{\{i\}} - F^{\{j\}}$, ou encore $F^{\{i,j\}} = \dfrac{F^{\{i\}} - F^{\{j\}}}{x_i - x_j}$. Cette expression justifie l'appellation de différence divisée.

Une formule similaire s'obtient pour les différences divisées d'ordres supérieurs :

Proposition - Différences divisées d'ordre supérieur :

> Soit $\{i_1, \dots, i_k\} \subset [\![1, n]\!]$ contenant au moins 2 éléments. La différence divisée F^I, qui est d'ordre $k - 1$, vérifie :
>
> $$\forall p < q \in [\![1, k]\!],\ (x_{i_q} - x_{i_p}) F^{\{i_1,\dots,i_k\}} := F^{\{i_1,\dots,i_k\}\setminus\{i_p\}} - F^{\{i_1,\dots,i_k\}\setminus\{i_q\}}$$

2.3 Partitions et réduction du nombre de variables

Étant donnée une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$, on définit :

$$\rho_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] & \longrightarrow & \mathbb{C}[y_1, \dots, y_k] \\ F(x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & F(\underbrace{y_1, \dots, y_1}_{\lambda_1}, \underbrace{y_2, \dots, y_2}_{\lambda_2}, \dots, \underbrace{y_k, \dots, y_k}_{\lambda_k}) \end{array}$$

L'application ainsi définie est un morphisme d'algèbres de polynômes. Concrètement, ce morphisme "réduit le nombre de variables" des polynômes, en en fixant certaines égales selon la partition considérée.

 gael.druez@ens-rennes.fr

2.4 Énoncé du théorème de factorisation

Théorème - Factorisation du déterminant:

> Soient $F^{\{1\}}, \ldots, F^{\{n\}} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ des polynômes homgènes de degré d, vérifiant la propriété d'équivariance **??**. On a alors :
>
> - Si $d \geqslant n$, alors
>
> $$Res\left(F^{\{1\}}, \ldots, F^{\{n\}}\right) = \prod_{\lambda \vdash n} Res\left(F_\lambda^{\{1\}}, F_\lambda^{\{1,2\}}, \ldots, F_\lambda^{\{1,2,\ldots,k\}}\right)^{m_\lambda}$$
>
> - Si $d < n$, alors
>
> $$Res\left(F^{\{1\}}, \ldots, F^{\{n\}}\right) = \left(F^{\{1,2,\ldots,d\}}\right)^{m_0} \times \prod_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leqslant d}} Res\left(F_\lambda^{\{1\}}, F_\lambda^{\{1,2\}}, \ldots, F_\lambda^{\{1,2,\ldots,\ell(\lambda)\}}\right)^{m_\lambda}$$

gael.druez@ens-rennes.fr

3 Groupes de réflexions

3.1 Représentation de groupes et définition

Définition - Groupe de réflexion :

> Un **groupe de réflexion** est un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(V)$ engendré par un nombre fini de réflexions.
> Par extension, on appellera groupe de réflexion tout groupe dont la représentation est un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(V)$ engendré par un nombre fini de réflexions.

3.2 Racines

Certaines réflexions jouent un rôle particulier, ainsi que les vecteurs qu'elles envoient sur leur opposé. On va donner un nom à ces réflexions et aux vecteurs associés.

Définition - Système de racines :

> On appelle **système de racines** tout ensemble $\Phi \subset V$, ensemble fini de vecteurs non nuls de V, vérifiant :
>
> $$\textbf{(R1)}\ \forall \alpha \in \Phi,\ \Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha,\ -\alpha\} \qquad \text{et} \qquad \textbf{(R2)}\ \forall \alpha \in \Phi,\ s_\alpha(\Phi) = \Phi$$
>
> Si W est un groupe de rélfexion engendré par les $\alpha \in \Phi$, alors ces α sont appelés les **racines** de W.

Définition - Système de racines positif :

> On fixe un ordre total sur V. Un sous-sensemble Π d'un système de racines Φ est dit **positif** pour cet ordre s'il contient exactement les $\alpha \in \Phi,\ \alpha > 0$.

Définition - Système de racines simple :

> Un sous-sensemble Δ d'un système de racines Φ est dit **simple** si Δ est une base de $\mathrm{Vect}(\Phi)$, et si de plus chaque $\alpha \in \Phi$ se décompose comme une combinaison linéaire d'éléments de Δ avec des coefficients tous de même signes.

3.3 Propriétés avancées

gael.druez@ens-rennes.fr

4 Généralisation

<table>
<tr><th>Groupe symétrique S_n</th><th>Groupe de réflexion G</th></tr>
<tr><td>$$\rho : \begin{array}{ccc} S_n & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ \sigma & \mapsto & \left[\rho_\sigma : x \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})\right] \end{array}$$</td><td>$$\phi : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ g & \mapsto & \begin{cases} M_g : x \mapsto M_g x \\ \phi(g) : x \mapsto \phi(g)(x) \end{cases} \end{array}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \end{array}$$ polynomiale (chaque f_i est un polynôme en $x_1, \dots, x_n$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propriété d'équivariance :</td></tr>
<tr><td>$\forall \sigma \in S_n,\ \forall x \in \mathbb{K}^n,\ f(\rho_\sigma(x)) = \rho_\sigma(f(x))$</td><td>$\forall g \in G,\ \forall x \in \mathbb{K}^n,\ f(\phi_g(x)) = \phi_g(f(x))$</td></tr>
<tr><td>On note $\Phi = \{e_i - e_j \ ;\ i \neq j\}$, $\Pi = \{e_i - e_j \ ;\ i < j\}$ et $\Delta = \{e_i - e_{i+1} \ ;\ i \in [\![1, n]\!]\}$</td><td>Notons Φ un système de racines de G, Π un système positif et Δ un système simple.</td></tr>
<tr><td>Comme $S_n = \langle (ij) \ ;\ i < j \rangle$ et que $\rho((ij)) = s_{e_i - e_j}$, on peut restreindre la propriété d'équivariance aux permutations issues de Π :
$\forall \alpha \in \Pi,\ \forall x \in \mathbb{K}^n,\ f(s_\alpha(x)) = s_\alpha(f(x))$</td><td>Comme G est supposé être un groupe de réflexion, il est engendré par un ensemble $\{g_i \ ;\ i\}$ tel que tout ϕ_{g_i} est une réflexion dont un vecteur normal α_i est dans Π. On peut donc restreindre la propriété d'équivariance :
$\forall \alpha \in \Pi,\ \forall x \in \mathbb{K}^n,\ f(s_\alpha(x)) = s_\alpha(f(x))$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Base d'invariants :</td></tr>
<tr><td>On a deux ensemble de polynômes invariants générateurs usuels :
$$p_k : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^k$$ $$e_k : x \mapsto \sum_{I \subset [\![1,n]\!],\ |I| = k} \prod_{i \in I} x_i$$</td><td>On sait qu'il existe des polynômes $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ algébriquement indépendants qui engendrent l'espace des invariants</td></tr>
<tr><td>Les p_k vérifient $\frac{\partial p_k}{\partial x_i} = k x_i^{k-1}$ et donc leur jacobien est proportionnel à un déterminant de Vandermonde</td><td>Comme les σ_k sont algébriquement indépendants, leur jacobien est non nul (d'après le critère vu précédemment)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Définition des différences divisées :</td></tr>
<tr><td>Pour $I := \{i_1, \dots, i_k\} \subset [\![1, n]\!]$, on définit $$F^I = \frac{\mathcal{J}(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_{k-1}}, F)}{\mathcal{J}(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_{k-1}}, p_{i_k})}$$</td><td>Pour $I := \{i_1, \dots, i_k\} \subset [\![1, n]\!]$, on définit $$F^I = \frac{\mathcal{J}(\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_{k-1}}, F)}{\mathcal{J}(\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_{k-1}}, \sigma_{i_k})}$$</td></tr>
</table>

gael.druez@ens-rennes.fr

Conclusion

Malheureusement, mon stage a duré trop peu de temps et je n'ai pas pu avancer autant que je voulais. Bien que le début semble prometteur, il reste beaucoup à faire, notamment des manipulation à généraliser.

J'ai passé beaucoup de temps à analyser le résultat de la première partie dans un premier temps, et ensuite j'ai fait l'erreur de ma lancer dans une recherche en ne maîtrisant que sommairement les groupes de réflexions. Je suis alors revenu à mon étude des groupes de réflexions, et j'ai eu l'esprit plus clair là-dessus, mais la fin du stage est arrivée rapidement ensuite.

Néanmoins, nous allons continuer à avancer sur cette piste avec les 3 autres personnes dans le projet.

De mon côté, je suis satisfait de ce stage car il m'a permis de faire le lien entre les connaissances académiques et le monde de la recherche. En effet, j'ai principalement étudié pour accumuler des connaissances nouvelles, mais j'ai aussi expérimenté la recherche : à partir d'une idée de mon maître de stage, j'ai cherché à généraliser une notion dont on n'avait pas trouvé de travaux avant ça. Il y a eu beaucoup d'échecs (que je n'ai pas rapportés dans ce rapport), mais quelques réussites quand même (par exemple quand une preuve dans le cas général est beaucoup plus rapide que dans le cas particulier en utilisant les outils généraux). Je suis content d'avoir pu expérimenter ce monde particulier de la recherche et je pense en avoir eu un aperçu représentatif.

Bibliographie et remerciements

Références

[N P09] Sh. Shakirov N. Perminov. “Discriminant of symmetric polynomials (unpublished)”. In : (2009).

[Lau16] Anna Karasoulou Laurent Busé. “Resultant of an equivariant polynomial system with respect to the symmetric group”. In : *Journal of Symbolic Computation* (2016). DOI : 76:142-157.

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont rendu ce stage possible. Ça a été une expérience très enrichissante culturellement, humainement et mathématiquement.

Merci en particulier à Cordian Riener de m'avoir donné cette opportunité et de m'avoir accueilli dans l'équipe. Merci également au Centre Henri Lebesgue et à l'ENS Rennes pour l'aide financière.

gael.druez@ens-rennes.fr